PART2　領域と最大・最小

2　実数 x，y が $x^2+y^2 \leqq 5$，$y \geqq 2x$ を満たすとき，$2x+y$ の最大値と最小値を求めよ。

Point Pickup

条件として与えられた連立不等式の表す領域 D を図示し，最大値や最小値を求めたい式を $f(x,\ y)=k$ とおいて，$f(x,\ y)=k$ が表す図形が領域 D と共有点をもつときの k の値の最大値や最小値を求める。

第 7 講　PART2　確認問題

1　実数 x，y が，

$$x^2+y^2 \leqq 20,$$

$$y \leqq x-2\sqrt{5}$$

を満たすとき，$x-2y$ の最大値と最小値を求めよ。

$x=$ [ア]，$y=$ [イウ] のとき　最大値 [エオ]

$x=$ [カ]$\sqrt{[キ]}$，$y=$ [ク] のとき

最小値 [ケ]$\sqrt{[コ]}$

PART2　領域と最大・最小

2　実数 x，y が $x^2+y^2 \leqq 5$，$y \geqq 2x$ を満たすとき，$2x+y$ の最大値と最小値を求めよ。

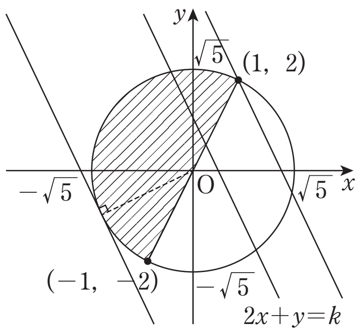
円 $x^2+y^2=5$ …… ① と直線 $y=2x$ …… ② の共有点の x 座標は

$x^2+(2x)^2=5$　　$x^2=1$ より　$x=\pm 1$

よって，円①と直線②の共有点の座標は　$(1,\ 2)$，$(-1,\ -2)$

したがって，連立不等式 $x^2+y^2 \leqq 5$，$y \geqq 2x$ の表す

領域 D は，右図斜線部分。ただし，境界線を含む。



$2x+y=k$ …… ③ とおくと，$y=-2x+k$

これは，傾き -2，y 切片 k の直線を表す。

この直線③が領域 D と共有点をもつときの，y 切片 k の

最大値，最小値を求める。

k が最大となるのは，直線③が点 $(1,\ 2)$ を通るとき

このとき　$k=2\cdot 1+2=4$

k が最小となるのは，直線③が円①と第 3 象限で接するとき

直線③と円①の中心 $(0,\ 0)$ の距離が円の半径 $\sqrt{5}$ と等しくなるときを考えて

$$\frac{|-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}\qquad |k|=5\qquad \text{よって}\quad k=\pm 5$$

第 3 象限で接するとき $k<0$　　よって　$k=-5$

このとき，直線③と円①の接点は，直線③と，$(0,\ 0)$ を通り直線③と垂直な直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ の交点

であるから，その座標は $(-2,\ -1)$　　これは，領域 D に含まれる。

以上より　　最大値 4　$(x=1,\ y=2$ のとき$)$

　　　　　　最小値 -5 $(x=-2,\ y=-1$ のとき$)$

第 7 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イウ：-4，エオ：10，カ：2，
キ：5，ク：0，ケ：2，コ：5

[解説]

円 $x^2+y^2=20$ ……① と直線 $y=x-2\sqrt{5}$ ……②

の共有点の x 座標を求めると

$$x^2+(x-2\sqrt{5})^2=20$$

$$2x^2-4\sqrt{5}x=0$$

$$2x(x-2\sqrt{5})=0$$

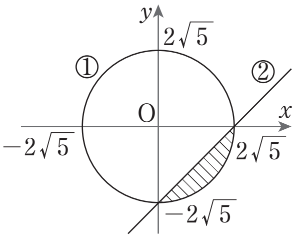
ゆえに　$x=0,\ 2\sqrt{5}$

よって，円①と直線②の共有点の座標は

$$(0,\ -2\sqrt{5}),\ (2\sqrt{5},\ 0)$$

したがって，連立不等式 $x^2+y^2\leqq 20$，$y\leqq x-2\sqrt{5}$

の表す領域 D は，右図斜線部分。ただし，境界線を含む。



$$x-2y=k \text{ ……③}$$

とおくと，[A]

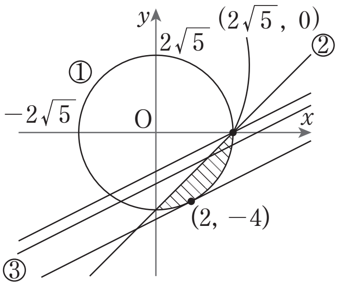
$$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}k$$

より，③は傾き $\frac{1}{2}$，y 切片 $-\frac{1}{2}k$ の直線を表す。

この直線③が領域 D と共有点をもつような k の値の最大値と最小値を求めればよい。

[A]　領域と最大・最小
与えられた連立不等式が表す領域 D を図示する。最大値や最小値を求める式を $f(x,\ y)=k$ とおいて，$f(x,\ y)=k$ が表す図形を動かし，この図形が領域 D と共有点をもつような範囲を調べる。この範囲における k の値の最大値や最小値を求める。

k が最大となるのは，y 切片 $-\frac{1}{2}k$ が最小となるとき，すなわち，直線③と円①が第4象限で接するときである。



直線③と円①の中心 (0, 0) の距離が半径 $2\sqrt{5}$ と等しくなるときを考えて

$$\frac{|-k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=2\sqrt{5} \quad \text{[B]}$$

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

$$|k|=10$$

よって　$k=\pm10$

図より，第4象限で接するとき，y 切片 $-\frac{1}{2}k$ は負であるから，$k>0$ より　$k=10$

このとき，直線③と円①の接点は，直線③と，(0, 0)を通り直線③と垂直な直線 $y=-2x$ の交点であるから

$$\frac{1}{2}x-\frac{10}{2}=-2x \qquad x=2$$

よって，接点の座標は　(2, −4)

これは領域 D に含まれる。

次に，k が最小となるのは，y 切片 $-\frac{1}{2}k$ が最大となるとき，すなわち，直線③が点 $(2\sqrt{5},\ 0)$ を通るときである。

このとき　$k=2\sqrt{5}-2\cdot0=2\sqrt{5}$

以上から，

$x=2,\ y=-4$ のとき　最大値 10

$x=2\sqrt{5},\ y=0$ のとき　最小値 $2\sqrt{5}$

> [B]　点と直線の距離
> 点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は
> $$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$